

## Výtok kapaliny otvorem ve dně nádrže (výtok kapaliny z danaidy)

### Úvod:

Problematika výtoku kapaliny z nádrže se uplatňuje při vyprazdňování nádrží a při nejjednodušším nastavování konstantních průtoků. Problematika nastavování konstantních průtoků je teoreticky nejméně náročná, nevyžaduje znalosti diferenciálního a integrálního počtu jako je tomu při vyprazdňování nádrží.

### Úkol:

- 1) Ověřit platnost Torricelliho výtokového vzorce pro výtok kapaliny z nádrže
- 2) Porovnat výtokové rychlosti vody otvory různých průměrů ve dně nádrže (výtokovými trubicemi) a hodnoty výtokových součinitelů
- 3) Porovnat vliv úprav vtokových hran výtokové trubice na hodnotu výtokového součinitele
- 4) Na základě měření vyslovit názor na konstantnost výtokového součinitele trubice daného průměru, případně jeho závislosti na výšce hladiny kapaliny v nádrži
- 5) Odůvodnit různé hodnoty výtokových součinitelů u trubic různých průměrů a trubic sice stejného průměru, ale různých úprav vtokového otvoru na základě představ vyplývajících z teoretického úvodu.

### Teoretický úvod:

Tlaková energie kapaliny o tlaku  $p$  a objemu  $V$  na dně nádrže se mění ve výtokovém otvoru v kinetickou. Kapalina o hmotnosti  $m$  vytéká otvorem rychlostí  $v$ . Ze zákona o zachování energie vyplývá rovnost energií

$$pV = 0,5 m v^2$$

Tlak kapaliny o hustotě  $\rho$  je roven hydrostatickému tlaku jejího sloupce o výšce  $h$  nad spodním okrajem výtokového otvoru a její objem podílu hmotnosti  $m$  a hustoty  $\rho$ :

$$\rho g h \frac{m}{\rho} = 0,5 m v^2 = m g h$$

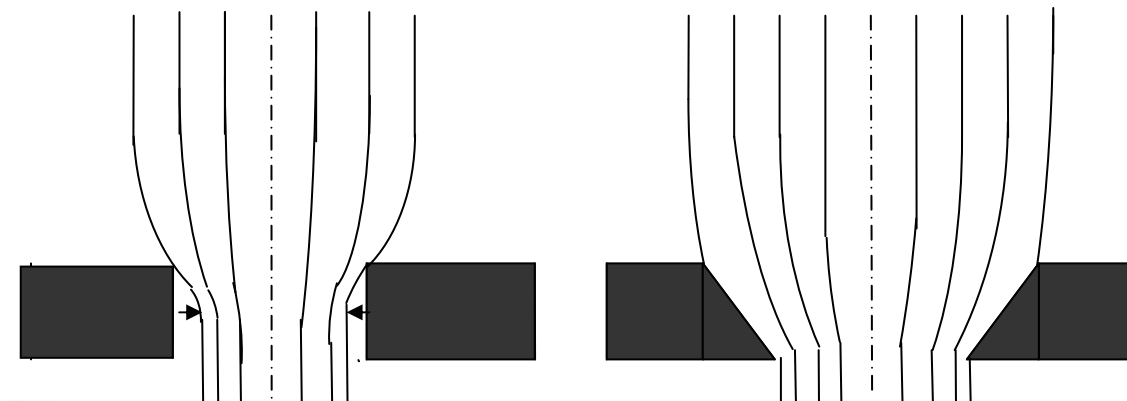
Z předchozí rovnice je zřejmé, že kinetická energie vytékající kapaliny se rovná její tlakové energii a rovněž polohové energii kapaliny v její hladině. Po její úpravě dostaneme Torricelliho vzorec pro výpočet teoretické výtokové rychlosti  $v_t$  (ideální kapaliny)

$$v_t = (2 g h)^{0,5} \quad (1)$$

Vytékající reálná kapalina ztrácí část své energie vnitřním třením, třením o stěny nádoby a výtokového otvoru. Ve výtokovém otvoru dochází též ke zúžení sloupce vytékající kapaliny. Proto musíme teoretickou výtokovou rychlost korigovat výtokovým součinitelem  $\mu$ , abychom dostali skutečnou výtokovou rychlost  $v_s$ :

$$v_s = \mu v_t = \mu (2 g h)^{0,5} \quad (2)$$

Lze předpokládat, že i výtokový součinitel závisí na výtokové rychlosti a tím i na výšce hladiny kapaliny v nádrži, která se může projevit různou měrou u výtokových trubic různých průměrů a různého opracování vtokového otvoru (přízpusobení vtokového otvoru výtokové trubice tvaru proudnic) podle obrázku



Skutečnou výtokovou rychlost  $v_s$  vypočteme z objemu  $V$  nateklého do odměrného válce za dobu  $\tau$  otvorem o změřeném průměru  $d$

$$v_s = \frac{4V}{\pi \tau d^2} = \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{V}{\tau} = k_v \cdot \frac{V}{\tau} \quad (3)$$

Konstanta  $k_v = \frac{4}{\pi d^2} \left[ \text{m}^{-2} \right]$ , platná jen pro zvolenou trubici o světlosti  $d$ , umožňuje rychlou a včasnou nápravu případných anomálních výsledků jejich vyřazením a opakováním příslušného počtu měření.

Hodnotu výtokového součinitele  $\mu$  vypočteme z rovnice

$$\mu = \frac{v_s}{v_t} = \frac{4V}{\pi \tau d^2 (2gh)^{0,5}} \quad (4)$$

Pro zvolenou nebo zadanou výtokovou trubici o průměru  $d$  je konstantní součin

$$\frac{4}{\pi d^2 (2g)^{0,5}} = k_d \left[ \text{m}^{-2,5} \text{s} \right] \quad (5)$$

takže hodnoty výtokového součinitele pro sérii měření s výtokovou trubicí o průměru  $d$  pak počítáme podle rovnice

$$\eta = k_d \frac{V}{\tau h^{0,5}} \quad (6)$$

### **Sestava aparatury:**

Pro ověření Torricelliho vzorce a stanovení výtokového součinitele vyhovuje laboratorní sestava podle obrázku. Černě jsou značeny hadice. Hadice a trubice na přívod vody z vodovodu a do danaidy musí mít větší vnitřní průměr než je vnitřní průměr výtokové trubice danaidy, aby mohly doplňovat válec 1 danaidy i při největších průtocích vody výtokovou trubicí 3. Dekantační válec 5 musí být umístěn tak, aby byl přepad ve větší výšce nad maximální výškou vodní hladiny v danaidě než je maximální výška vodní hladiny v danaidě nad spodním okrajem výtokové trubice 3. Jen tak získáme dostatečný energetický spád potřebný k úspěšnému průběhu měření. Přívod vody 10 do danaidy upravujeme uchycením do držáku při každé změně výšky hladiny tak, aby výtok z něj byl asi 5mm nad polystyrénovým

plováčkem 4. Polystyrénový plováček ve zvláštní úpravě by měl zmařit hadici kinetickou energii přitékající vody a přerušením vodního sloupce i hydrostatický tlak způsobený rozdílem výšek hladin vody v danaidě a dekantačním válci, které by mohly měření ovlivnit. Výřezy na obvodu plováčku umožňují nerušené odečítání výšky hladiny na stupnici měřítka 2 na danaidě. Nepoužijeme-li plováčku, umístíme zakončení přívodní hadice asi 2-3 cm nad horní okraj zátky 3 ke stěně válce 1, aby proud přitékající vody nesměřoval do výtokového otvoru a neovlivňoval výtokovou rychlost. Dekantační válec zajišťuje konstantní nátok do danaidy přepadem a nastavením kohoutu nebo tlačky 9.

**Postup při měření:**

Aparaturu sestavíme podle uvedeného obrázku. Posuvným měřítkem změříme **vnitřní** průměr  $d$  (světlost) výtokové trubice. Válec danaidy 1 uzavřeme zátkou s výtokovou trubicí a změříme délku  $h_t$  od spodního okraje výtokové trubice po nulu stupnice měřítka 3 na válci 1 danaidy. Změřené hodnoty zapíšeme. Do válce danaidy vložíme plovák 4 a válec uchytneme do stojanu v přiměřené výšce umožňující snadnou manipulaci s odměrným válcem vhodného objemu na jímání vyteklé vody. Vhodný objem vypočteme z průřezu výtokové trubice, teoretické výtokové rychlosti pro výšku hladiny 50 cm a předpokládané doby měření asi 10 s. Stojan s danaidou postavíme do výlevky. Zavřeme tlačku nebo kohout 9 na hadici 10 a naplníme dekantační válec 5 až po přepad 8 vodou z vodovodu. Hadici 10 s trubicí umístíme do válce danaidy tak, aby trubice na jejím konci směřovala přibližně do středu plováku. Mírně otevřeme tlačku 9 a začneme napouštět válec danaidy.

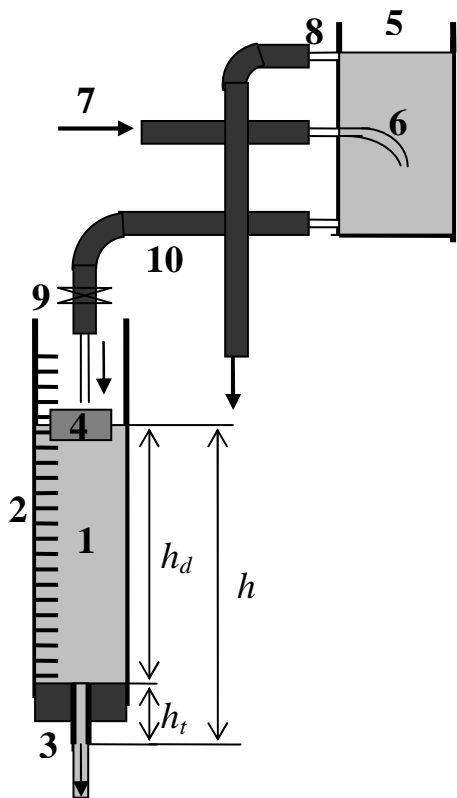


Schéma měření výtokové rychlosti danaidou

- 1 - skleněný válec
- 2 - měřítko
- 3 - zátka s výtokovou trubicí
- 4 - polystyrénový plováček
- 5 - dekantační válec
- 6 - voda
- 7 - přívod vody z vodovodu
- 8 - přepad
- 9 - tlačka nebo kohout k regulaci přítoku vody do danaidy
- 10 - přívod vody do danaidy

Měření zahájíme při výšce hladiny asi 5 cm na měřítku, kdy už výška hladiny není ovlivněna vírem vody vtékající do výtokové trubice. Vodovodní kohout na přívodu 7 nastavujeme během měření tak, aby voda z dekantčního válce 5 mírně odtékala přepadem 8.

Postupným otvíráním kohoutu nebo tlačky 9 nastavujeme různé výšky hladin v danaidě, při kterých měříme objem vody  $V$  vyteklý do odměrného válce za dobu  $\tau$  měřenou stopkami. Stále kontrolujeme výšku hladiny vody v dekantčním válci 5 a udržujeme mírný přepad. Hladiny vody v danaidě zvyšujeme postupným otevíráním tlačky nebo kohoutu 9 pokud možno v rovnoměrných intervalech po 4 až 5 cm tak, abychom získali výsledky asi z 10 měření. Při každé výšce měříme třikrát, při anomálních výsledcích měření opakujeme, pokud nezískáme tři uspokojivé výsledky. Kontrolu výsledků urychlí výpočty s konstantou  $k_v$  uvedenou v rov.4. Ustálení hladiny ve vyšší poloze urychlíme občasným uzavíráním otvoru výtokové trubice prstem a sledováním pohybu hladiny v danaidě až do jejího ustálení. Podobně dosáhneme ustálení hladiny v nižší poloze občasným sevřením přívodní hadice 10 prsty. Při měření vyteklého objemu nevyužíváme maximálního vyznačeného objemu na odměrném válci. Včas jej odstavíme, současně zastavíme stopky a odečteme objem vyteklé vody. Během měření změříme též teplotu vody a uvedeme ji v záhlaví tabulky naměřených a vypočtených hodnot.

**Vyhodnocení výsledků měření:**

Tabulku naměřených hodnot doplníme vypočtenými, např. podle uvedeného vzoru.

Tabulka výsledků měření na danaidě o průměru  $d \dots$  mm výtokového otvoru při teplotě vody  $t = \dots^\circ\text{C}$ , výšce nuly stupnice danaidy  $h_t = \dots$  mm nad výtokovým otvorem trubice, výškách hladin vody  $h_d$  odečtených na měřítku danaidy a celkové výšce hladiny vody nad výtokovým otvorem  $h = h_t + h_d$

Číslo měření	$h_d$ mm	$\tau$ s	$V$ $\text{cm}^3$	$v_s$ $\text{m s}^{-1}$	$v_t$ $\text{m s}^{-1}$	$h$ m	$\mu$ 1

Tabulku naměřených hodnot napíšeme nejlépe v programu EXCEL, doplníme ji vypočtenými hodnotami a použijeme k nakreslení grafů.

Skutečnou výtokovou rychlost  $v_s$  vypočteme podle rov.(3), teoretickou  $v_t$  podle rov.(1) a hodnotu výtokového součinitele  $\mu$  podle rov.(4) nebo (6). Pro hodnoty  $v_t$  platí, že  $v_t > v_s$  a pro hodnoty výtokových součinitelů  $\mu < 1$ .

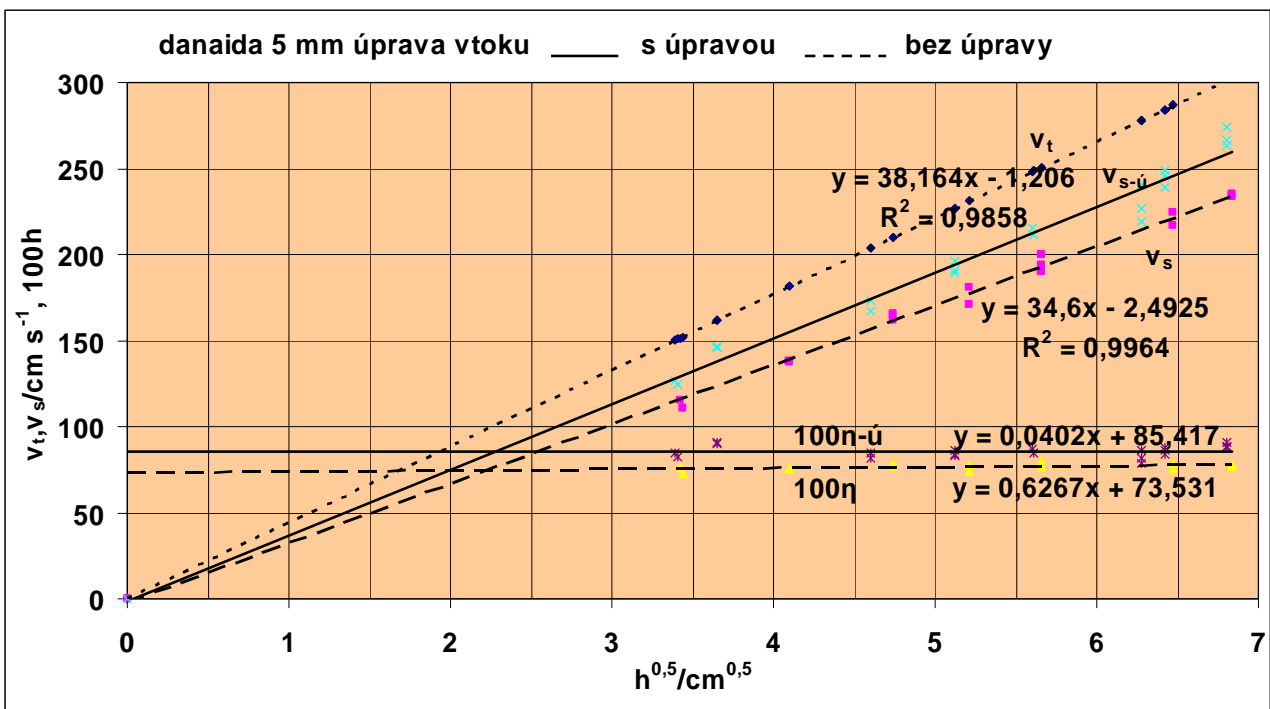
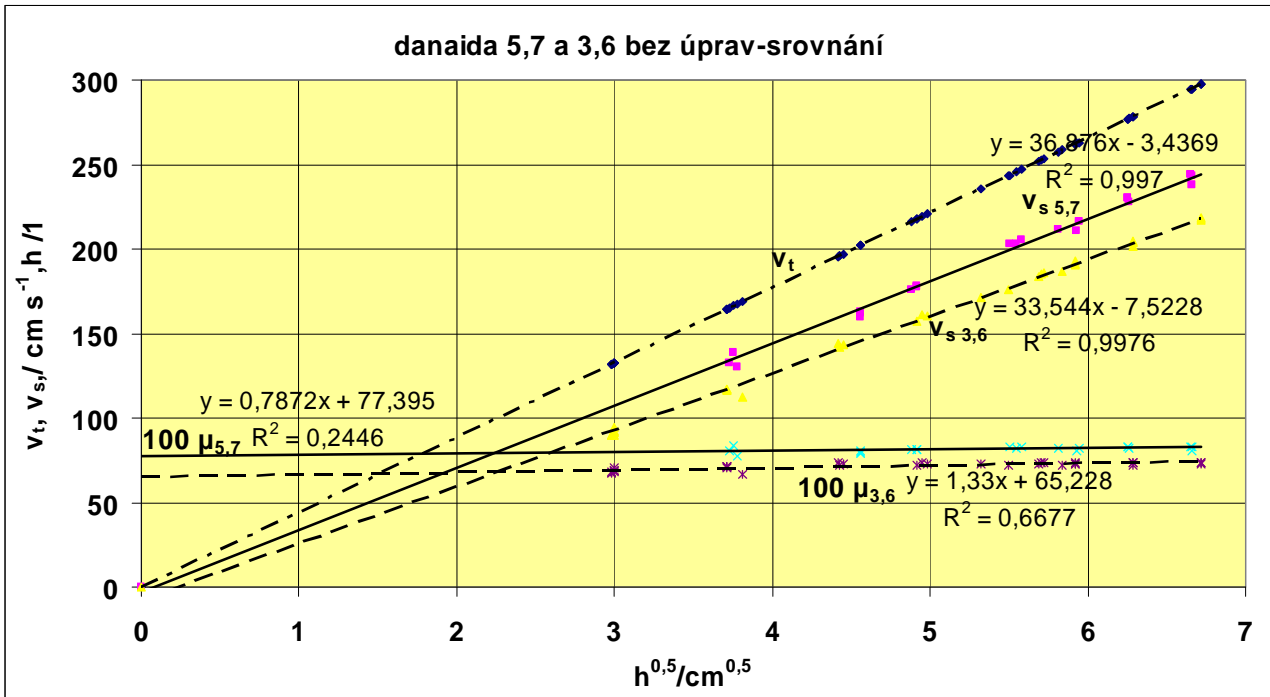
Názorné vyhodnocení grafů poskytnou grafy linearizovaných závislostí výtokových rychlostí  $v_s$  a  $v_t$  na  $h^{0,5}$ . Závislost  $v_t$  na  $h^{0,5}$  musí být lineární a na její nakreslení stačí pouze souřadnice dvou, nejlépe okrajových bodů, závislost  $v_s$  se linearitě blíží (při blízkých hodnotách  $\mu$ ). Prakticky lineární závislostí  $v_s$  na  $h^{0,5}$  dokážeme platnost Torricelliho vzorce pro výtokovou rychlost.

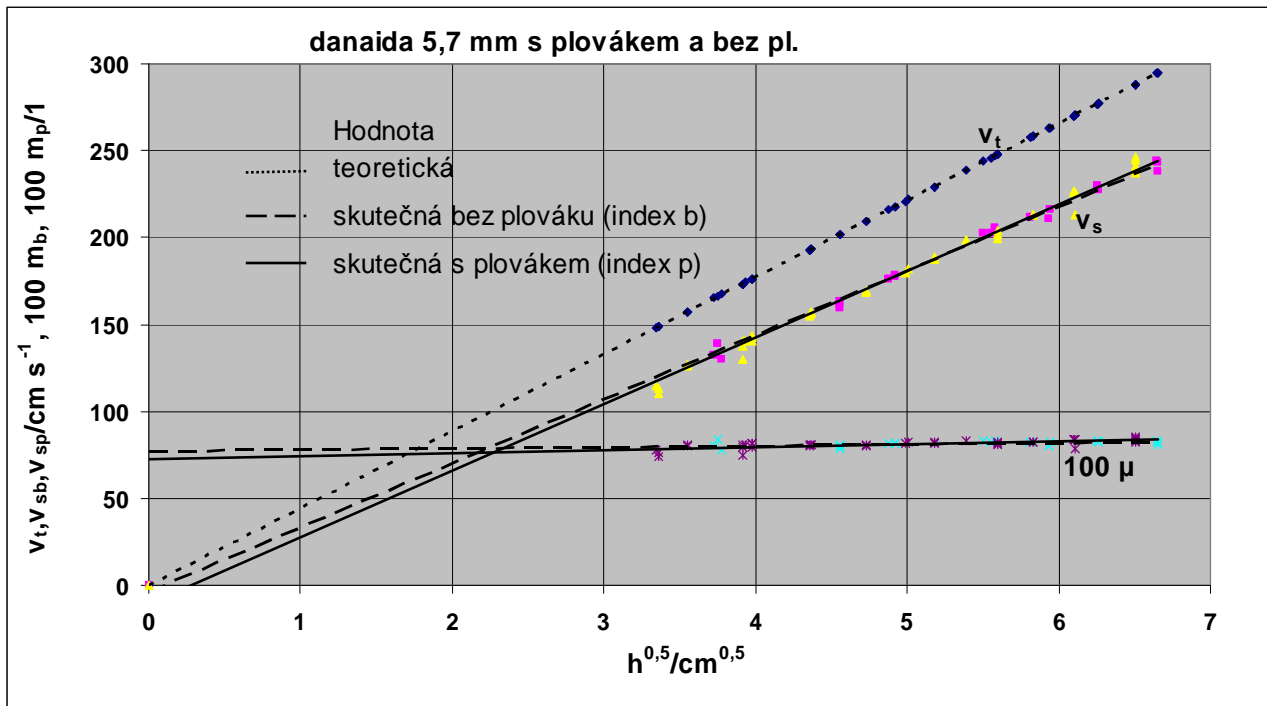
**Příloha:**

1) Graf závislosti výtokové rychlosti  $v_s$  a výtokového součinitele  $\mu$  na průměru  $d$  výtokového otvoru.

2) Graf závislosti úpravy vtokového otvoru na výtokovou rychlost  $v_s$  a výtokový součinitel  $\mu$ .

3) Graf závislostí výtokových rychlostí  $v_t$  a  $v_s$  a výtokového součinitele  $\mu$  na druhé odmocnině výšky hladiny vody  $h^{0,5}$  v danaidě bez plováku a s plovákem.





### **Diskuse výsledků:**

V diskusi výsledků se stručně a výstižně vyjádříme k jednotlivým otázkám uvedeným v odst.Úkol:

- 1) k ověření Torricelliho výtokového vzorce,
- 2) k porovnání výtokových rychlostí vody a výtokových součinitelů
  - a) u výtokových trubic různých průměrů a stejných úprav vtokového otvoru,
  - b) u výtokových trubic stejného průměru, ale různých úprav vtokového otvoru,
- 3) vlivu plováku na rychlost výtoku,
- 3) na závislost výtokového součinitele
  - a) na výšce  $h$  hladiny vody.
  - b) na průměru  $d$  výtokového otvoru,
  - c) na úpravě vtoku výtokové trubice.

### **Kontrolní otázky:**

- 1) Odvoďte Torricelliho vzorec pro výtok kapaliny otvorem ve dně nádrže.
- 2) Jaký praktický význam má výtok kapaliny otvorem ve dně nádrže? Pokuste se odvodit vzorec pro výpočet doby vyprázdnění nádrže otvorem v jejím dně.
- 3) Které zásady platí pro průřezy přírodních a odvodních trubic do danaidy a dekantačního válce, aby byl zajištěn maximální rozsah měřených hodnot? Zdůvodněte je.
- 4) Které veličiny musíte změřit k výpočtu výtokové rychlosti a průtoku trubicí ve dně nádrže a jak je uplatníte při výpočtech?
- 5) Proč je výtoková rychlost vypočtená z experimentálních údajů nižší než teoretická? Jaký vztah platí mezi oběma rychlostmi?

6) Vysvětlete, proč je nutno změřit výšku počátku stupnice na měřítku danáidy nad výtokovým otvorem?

7) Jak dokážete platnost Torricelliho vzorce pro výtok kapaliny otvorem ve dně nádrže? Jak zlinearizujete závislost výtokové rychlosti na výšce hladiny kapaliny v ní?

8) Jakou závislost výtokové rychlosti na průměru výtokového otvoru předpokládáte a proč?

9) Jaký praktický význam má opracování vtokového otvoru výtokové trubice pro rychlost výtoku kapaliny z ní?

10) Vysvětlete význam výtokového součinitele pro výtok kapaliny otvorem ve dně nádrže . Na kterých veličinách závisí jeho hodnota?